901. Jordan-Hölder-Schreier ノ定理ノ lattice 的 formulation ニツイテ

中山　正（阪大）

下ラヌコトヲ駄辯ラセテ戴キマス．J-H-S 定理ノ lattice 的 formulation トシテハヨク modular lattice デノ J-H-S 定理ヲヤリマス．

然シコレデハ最モ原始的ナ（デアッタ）場合、即チ次々ニ前者ノ不変部分群デハアルが全体ノ群ノ不変部分群デナイ場合ニハ適用サレナイコト明カデアリマス。コノ事ハ誰デモ一寸氣ニナルコトデスが、タトヘバ Ore モ Trans. A.M.S. 41 (1937) デソレヲ取上ゲテ、ソノ不満ヲ回避スルタメ

modular デナイ lattice ヲ扱ヒ, ソコデアル種ノ J－H－S 定理ヲ述ベラ井マス。シカシソレハ群ノ場合ノ analogy デアッテ包含シテ井ルトハ云ヘナイコトハ、ソコニモ述ベラレテ井ル如クデアリマス。ソレハ群ノ方ニオイテ normal subgroup ニナルトイフ関係ノ類似トシテノ概念ヲドコマデモ lattice ノ言葉<u>ダケ</u>デ云ヘウトスルカラ自然無理ニナルノダラウト思ヒマス。群ノ方デモ ≧ 以外ニ normal subgroup ニナルトイフ所ノ、≧ デハ言ヒ表ハセナイ関係ガアルノデスカラ、ソレヲ含ム定理ヲ述ベルノナラ當然ソレニ相當シテ lattice ノ ≧ ヤ ∩, ∪ デハ表セナイ関係ヲ導入シテスベキダト思ヒマス。ソノ意味ニオイテ, ムシロ M. et Mme Dubreil ノ C.R. 205 (1937) ノ方ガ核心ニフレテ井ルノデハナイカト思ヒマス。

然シ、ソコデハ lattice トシテデナク部分集合トシテヤッテアル (lattice 或ヒハ partially ordered set ノ場合モソレヲ適當ニ表現シラトイフ風ニ持チ廻レバ、コレデモ良イノデセウ)。更ニ E. George, Crelle 180 (1939) モコレヲ取リ上ゲテ<u>大体</u> lattice ニオケル ≧ カラ transitivity ヲ除イタヤウナモノ、Halbverband ヲ導入シテ、ソコデ J－H－S－定理ヲ証明シテ井ル. トモカク群ノ場合ヲモ含ムヤウナ適當ナ formulation ヲスルノハ何レニシテモ容易デアル。タゞ要スルニ lattice ノ言葉ダケデハ少シ無理デ他ニ補助ノ概念ガ (ソレハ主トシテ

intransitive ナ)要ルワケデアル。而シテ若シ非常ニ一般ナ定理ニシテ述ベタケレバ容易ニ *George* ヤ *Dubreil* ノ *formulation* デハ飽キタラナクナリマス。タトヘバ *George* ノデモ *intransitive* ナ関係 $\geq$ ニオイテ、$A > B$ ナル A, B ノ間ノ *Kette* ヲ扱ッテヰルガ、ソレハ不充分ニ思ヘル。次々ニ $\geq$ ナダケデ何モ A ガ $\geq B$ デナイ *Kette* ヲ扱フベキデセウ。

即チ J-H-S 定理ハ純粋ニハ次々ニ……ヲ云々スベキデ、ハナレタ所ノ関係ハナルベク云フベキデナイト思フ。ソノ点ハ *Dubreil* ノデモ不徹底ナ所モアルヤウデアル。

然シソレナラドウキレイニ *formulate* シタラヨイカト云ハレルト一寸困ル。余リキレイニハ云ヘサウモナイ。コンデモ、ソウシター般ナ形ノモノヲ求メル積リデハナク、シカモ *George* ノホド大ガヽリニヤラナイデ、マア *lattice* ノ話ヲシテヰテ、序デニ J-H-S-定理ヲ群ノ場合モ含メテヤッテ置クトイフ様ナ場合手頃ナモノトシテ次ノ様ニデモシタラ如何カト思フノデス。

L ヲ *lattice* ($\geq, \cup, \cap$ ニヨル)トスル。コレニ更ニ二ツノ元ノ間ノ(*transitive* デナイ)関係 $>$ 及ビ二ツノ *quotients* ノ間ノ同値的関係 $\cong$ ガアッテ

(0) $a > b \longrightarrow a \geq b$

(I) $a > \left\{\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right. \longrightarrow a > b \cup c > \left\{\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} > b \cap c$

(II) 上ノ(I)ノ假定ノモトニ，更ニ

$$c = d_0 \supset d_1 \supset \cdots\cdots \supset d_q = b \cap c$$
$$(q = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナラバ

$$b \cup d_0 \supset b \cup d_1 \supset \cdots\cdots \supset b \cup d_q$$ デ

且ツ　$d_{i-1}/d_i \cong b \cup d_{i-1}/b \cup d_i$.

ソウスレバ *Zassenhaus* ノ *Lemma* ノ *analogy* トシテ（後述参照）

定理

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & \supset & a_1 & \supset & \cdots\cdots & \supset & a_s \\ \| & & & & & & \| \\ b_0 & \supset & b_1 & \supset & \cdots\cdots & \supset & b_t \end{array}$$

ナラバ

$$\frac{(a_{i-1} \cap b_{j-1}) \cup a_i}{(a_{i-1} \cap b_j) \cup a_i} \cong \frac{a_{i-1} \cap b_{j-1}}{(a_{i-1} \cap b_j) \cup (a_i \cap b_{j-1})}$$
$$\cong \frac{(a_{i-1} \cap b_{j-1}) \cup b_j}{(a_i \cap b_{j-1}) \cup b_j}$$

（証明）ハ勿論簡単デアル。${}_iC_j = a_i \cap b_j$ ト置ク。先ヅ

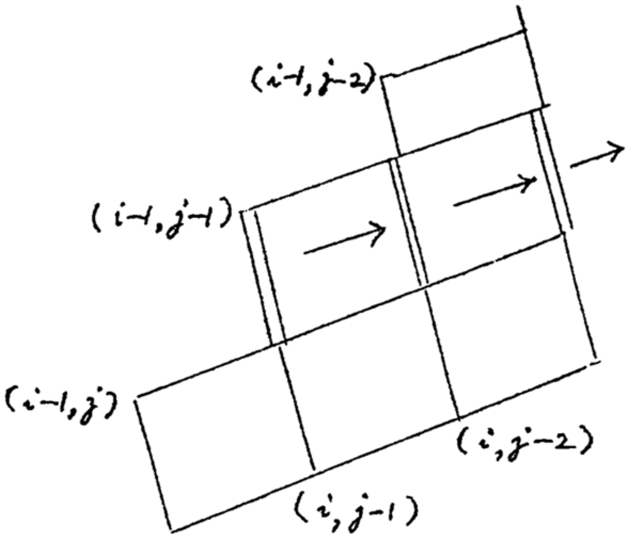
$${}_{i-1}C_j \supset {}_iC_j \;,\quad {}_iC_{j-1} \supset {}_iC_j$$

ガ容易ニ云ハレル．定理ノ前半ハ

$$\frac{a_i \cup {}_{i-1}C_{j-1}}{a_i \cup {}_{i-1}C_j} \simeq \frac{{}_{i-1}C_{j-1}}{{}_iC_{j-1} \cup {}_{i-1}C_j}$$

デアル。

ソノ証明ハ次ノ圖カラ汲ミトッテイタダキタイ．



即チ，次々ニヤッテ行クノデアル。(群ノ場合ノ Zassenhaus ノハ一度ニ出来タガ、今ハソノ様ナ假定ガナイカラ、次々ニヤル。ナホ上ノハ Zassenhaus ヨリズット弱イ形デアル。何故ナラ上ノ様ナ Kette ニ出テ来ルモノノ間ノ関係ダケダカラデアル。)

トモカクJ-H-S定理ハ或ル意味デハ lattice ノ定理トイフベキデハナイカモ知レナイ。Modular lattice デハ Dedekind's Transposition principle ガ成立ツトイフノハ lattice ノ定理デ、ソレ丁度第二同型定理ガ群ノ定理デアルトイフ如クデアル。ソシテソレ以後ハ或ル意味デ lattice デモ群デモナイ何カ transitive デナイアル種ノ関係ノアル system ノ定理ト見ルベキカト思フ。

序デニ(Zassenhaus ノ Lemma 的ナコトハ問題ニセズ)タダJ-H-S-定理ダケヲ問題ニシテ一般ニ formulate スレバ次ノ様ノ事ニデモナルノデハナイデセウカ。(Lattice モハナレテ)

L ヲ集合．ソノ二ツノ元ノ間ニ $\rightarrow$ ナル関係ガアッテ

(I) $a \rightarrow \begin{cases} b \\ c \end{cases}$ ナラバ L ノ中ニ $b \underset{a}{\cup} c$, $b \overset{a}{\cap} c$ ナル元ガアッテ

$$a \rightarrow b \underset{a}{\cup} c \rightarrow \begin{Bmatrix} b \\ c \end{Bmatrix} \rightarrow b \overset{a}{\cap} c$$

更ニ quotient (a/b (タゞシ $a \rightarrow b$)) ノ間ノ同値関係 $\cong$ ガアッテ

(II) 上ノ (I) ノ假定ノモトニ

$$\frac{b \underset{a}{\cup} c}{b} \cong \frac{c}{b \overset{a}{\cap} c}, \quad \frac{b \underset{a}{\cup} c}{c} \cong \frac{b}{b \overset{a}{\cap} c}$$

(III) $\frac{a}{b} \cong \frac{c}{d}$ デ $a \rightarrow a_1 \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow b$ ナラバ c ト d ノ間ニ同ジ長サノ $c \rightarrow c_1 \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow d$ ガアッテ對應スル quotients a/a_1, a_1/a_2, …… ト c/c_1, c_1/c_2, … ガ $\cong$.

(IV) $a \rightarrow c \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow d$ ガ長サ r デアリ且ツ
$a \rightarrow b \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow d$ ナラバ

$$c \overset{a}{\cap} b \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow d$$

ナル長サガ高々 $r-1$ ナル Kette ガアル。

然シ，ドウモコンナコトヲシテモ面白クアリマセン。モット一般ニモナルト思ヒマス。

最後ニ，J-H- ノ定理．スナハチ Kettensatz ノアル場合ノハ Birkhoff ノ Covering condition ノ

片方ダケヲミタス *lattice* デキレイニ行クコトハ明カデアリマス。

以上下ラヌ事ヲ長々駄辯ッテ申譯アリマセン。